Разбор задач заключительного этапа республиканской олимпиады по информатике 2018 г.

29 марта 2018 г.

День 1

День 1

1. Галактика
2. Поиск в перестановке
3. Спортивная трасса
4. Дерево удачи

Галактика
День 1 Задача 1

Дано:

N трёхмерных координат (X_i, Y_i, Z_i), где $1 \leq X_i, Y_i, Z_i \leq M$

Нужно:

Найти такие целые координаты (X, Y, Z),
чтобы минимизировать $\sum_{i=1}^{N}((X - X_i)^2 + (Y - Y_i)^2 + (Z - Z_i)^2)$

Галактика
День 1 Задача 1

Для каждой координаты задача решается независимо, т.к.
$\sum_{i=1}^{N}((X-X_i)^2+(Y-Y_i)^2+(Z-Z_i)^2)=$
$\sum_{i=1}^{N}(X-X_i)^2+\sum_{i=1}^{N}(Y-Y_i)^2+\sum_{i=1}^{N}(Z-Z_i)^2$

Галактика
День 1 Задача 1

$$\sum_{i=1}^{N}(X - X_i)^2 = N \cdot X^2 + \sum_{i=1}^{N} X_i^2 - 2X \cdot \sum_{i=1}^{N} X_i$$

Галактика
День 1 Задача 1

Если один раз вычислить $\sum_{i=1}^{N} X_i^2$ и $\sum_{i=1}^{N} X_i$, то остаётся перебрать все X от 1 до M.

Галактика. Как быстрее
День 1 Задача 1

- Вычисляется производная и приравнивается к нулю: $(N \cdot X^2 + \sum_{i=1}^{N} X_i^2 - 2X \cdot \sum_{i=1}^{N} X_i)' = 2NX - 2 \cdot \sum_{i=1}^{N} X_i = 0$
- Выражается X: $X = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}$
- Определяется ближайшее целое значение, которое и является ответом.

Галактика
День 1 Задача 1

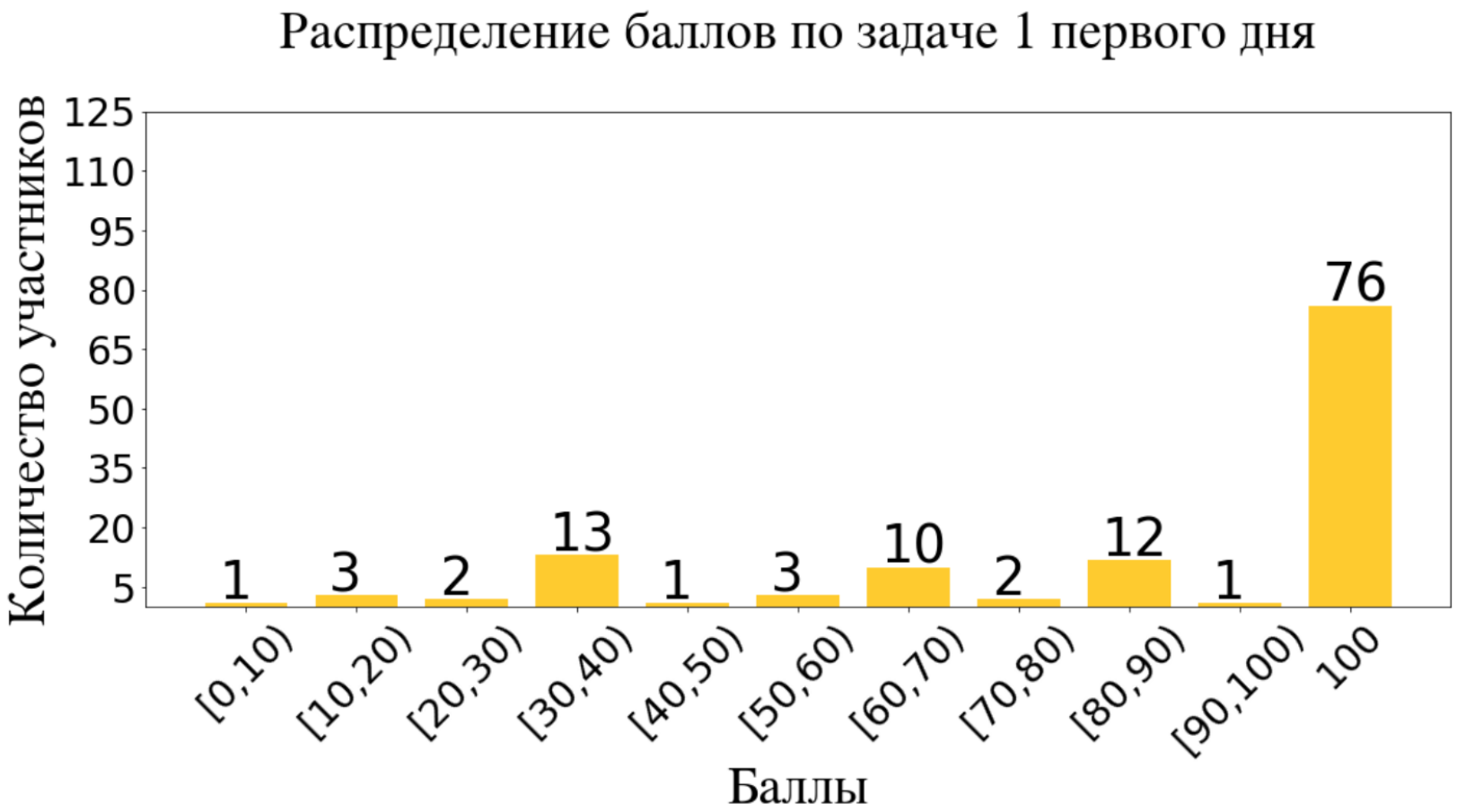
Итоговая асимптотика:

$O(N + M)$ (или $O(N)$)

Сложность задачи:

Низкая

День 1 Задача 1
Результаты



Поиск в перестановке
День 1 Задача 2

Дано:

Перестановка N чисел
Возможность 100000 раз узнать результат сравнения пар чисел из перестановки

Нужно:

Найти позицию числа K в перестановке

Поиск в перестановке
День 1 Задача 2

Используя $N - 1$ запрос *IsLess*, можно построить дерево отрезков.

Поиск в перестановке
День 1 Задача 2

В построенном дереве отрезков можно без дополнительных запросов найти позицию минимума.

Поиск в перестановке
День 1 Задача 2

Чтобы решить задачу, нужно:

- $K - 1$ раз найти позицию минимума.
- Поставить в эту позицию $+\infty$.
- В процессе подъёма к корню перестроить дерево, используя *IsLess*.
- В K-ый раз найти позицию минимума, которая и будет ответом.

Поиск в перестановке
День 1 Задача 2

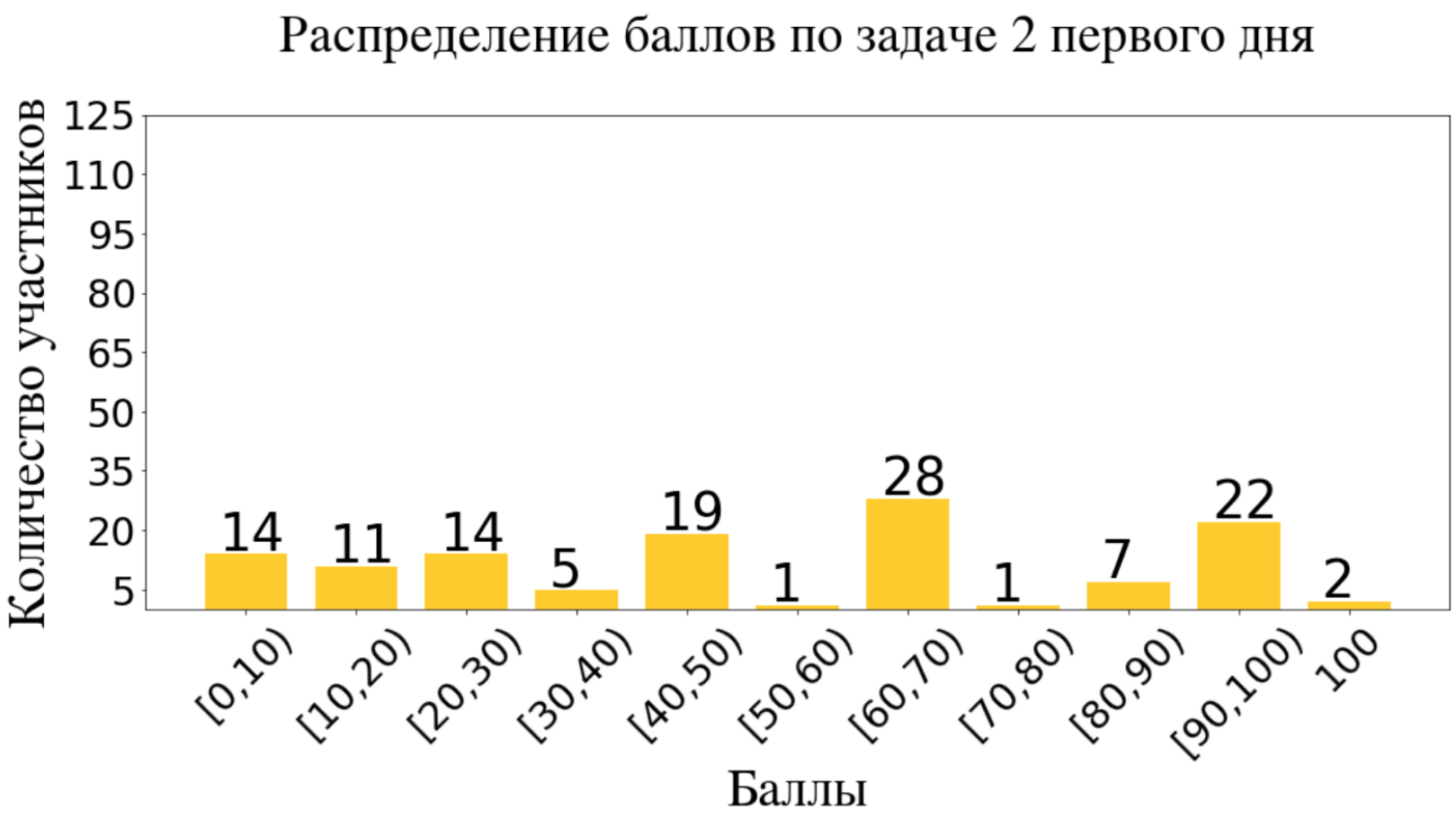
Количество запросов:

$N - 1 + (K - 1) \cdot (\lceil \log_2 N \rceil - 1)$

Сложность задачи:

Средняя

День 1 Задача 2
Результаты



Спортивная трасса
День 1 Задача 3

Дано:

Матрица размера $N \times M$ с элементами H_{RC}

Нужно:

Найти количество четвёрок чисел R_1, C_1, R_3, C_3 таких,
что $H_{R_1 C_1} \geq H_{R_1 C_3} \geq H_{R_3 C_3} \geq H_{R_3 C_1}$
или $H_{R_1 C_1} \leq H_{R_1 C_3} \leq H_{R_3 C_3} \leq H_{R_3 C_1}$

Спортивная трасса
День 1 Задача 3

Можно перебирать C_3 и строить решение для фиксированного столбца.

Спортивная трасса
День 1 Задача 3

Пусть $H_{R_1 C_3} = H_{R_3 C_3} = X$, тогда допустимо $H_{R_1 C_1} \geq X \geq H_{R_3 C_1}$ или $H_{R_1 C_1} \leq X \leq H_{R_3 C_1}$.

Для подсчёта количества:

- В произвольном порядке перебираются строки R' с равным $H_{R' C_3}$.
- Поддерживаются 2 массива $L_{C'}$ и $G_{C'}$ размера $(C_3 - 1)$ – количество строк в столбце C' с не большим / не меньшим значением, чем X, которые обновляются после обработки каждой строки.
- Перебирается C' и ответ обновляется на $L[C']$, если $H_{R' C'} \geq X$, иначе на $G[C']$.

Спортивная трасса
День 1 Задача 3

Пришло время отсортировать строки матрицы по значениям $H_{R'C_3}$ и решать задачу для $H_{R_1C_3} < H_{R_3C_3}$.

P.S.: На самом деле строки не сортируются, а сортируются только индексы.

Спортивная трасса
День 1 Задача 3

Теперь можно перебрать $C_1 < C_3$.
Понятно, что анализировать нужно те столбцы, где $H_{R_3 C_1} \geq H_{R_3 C_3}$.

Спортивная трасса
День 1 Задача 3

Чтобы получить ответ, достаточно быстро определять количество строк $R' < R_3$ таких, что $H_{R'C_3} < H_{R_3C_3}$ и $H_{R'C_1} \leq H_{R'C_3}$.
Для этого можно хранить эти количества в массиве F размера $C_3 - 1$ и обновлять его после обновления ответа для каждой группы с равными значениями H_{RC_3}.

Спортивная трасса
День 1 Задача 3

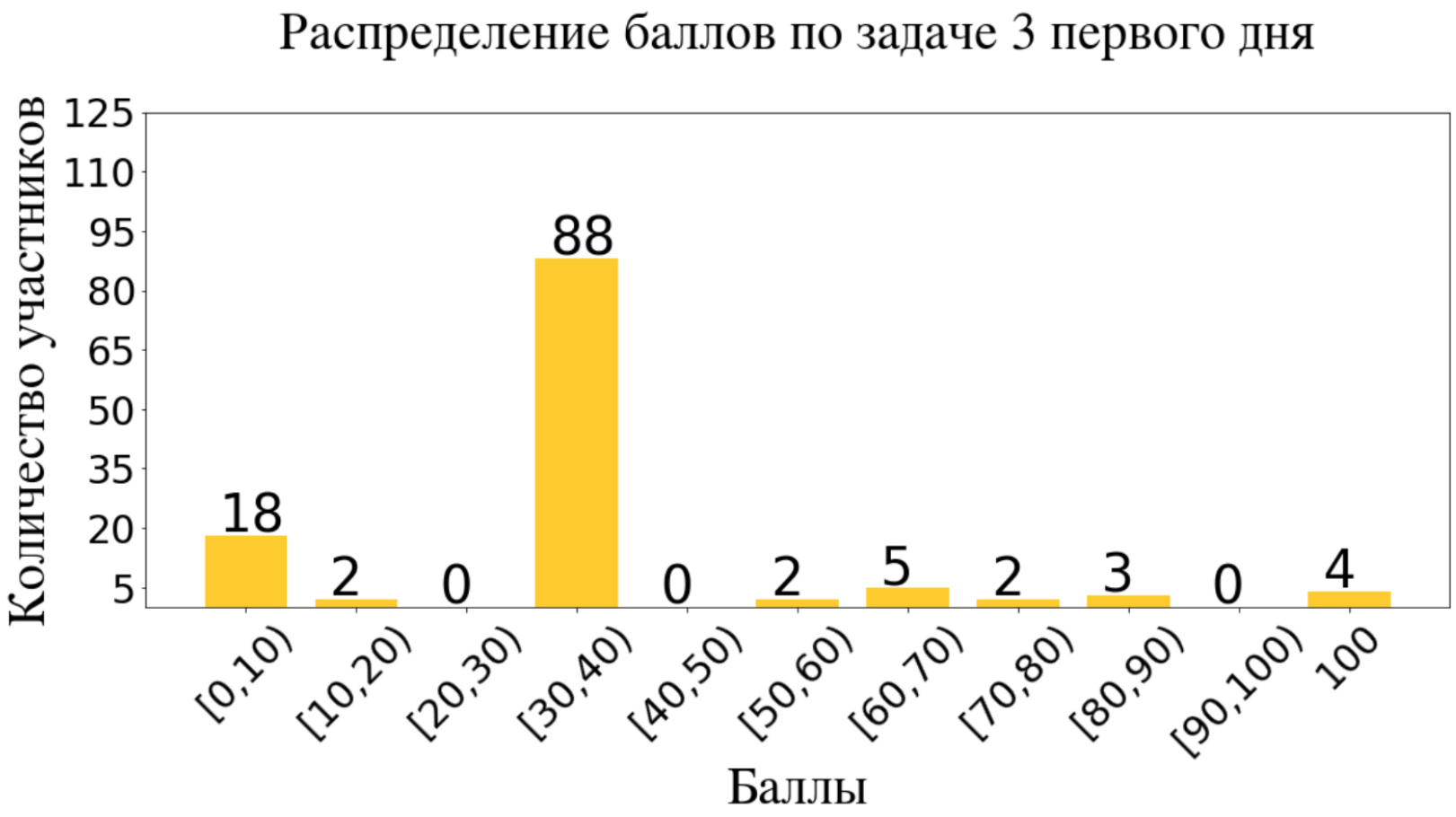
Итоговая асимптотика:

$O(M^2N)$

Сложность задачи:

Высокая

День 1 Задача 3
Результаты



Дерево удачи
День 1 Задача 4

Дано:

Корневое дерево с N вершинами
Цвет каждой вершины T_i

Нужно:

Для каждой вершины найти расстояние D_i такое,
что на расстоянии D_i от этой вершины найдётся хотя бы две одного цвета

Дерево удачи. Первый подход
День 1 Задача 4

- Для каждой вершины по её потомкам строится множество пар $(depth, color)$.
- Если множество вершины v содержит одинаковую пару $(depth', color')$, можно обновить её ответ величиной $depth' - depth(v)$.

Дерево удачи. Первый подход
День 1 Задача 4

Для вершины v искомое множество есть объединение множеств её потомков.
Поэтому можно:

- Строить множества в процессе обхода в глубину.
- После выхода из рекурсии объединять множества потомков добавлением меньших множеств к большему.

Дерево удачи. Первый подход
День 1 Задача 4

Асимптотика:

$O(N \log^2 N)$

Дерево удачи. Второй подход
День 1 Задача 4

Пусть $D'(v)$ – ответ для случая, когда одноцветные вершины находятся в разных поддеревьях v.

Тогда $D(v) = \min\{D'(v), 1 + \min_{child} D(child)\}$.

Дерево удачи. Второй подход
День 1 Задача 4

Если $D'(v) = h$, то найдётся две вершины одного цвета x и y такие, что:

- $d(x) = d(y)$, где $d(u)$ – глубина вершины в дереве
- $d(x) - d(v) = d(y) - d(v) = h$

Причём, $LCA(x, y) = v$.

Дерево удачи. Второй подход
День 1 Задача 4

- По порядку обхода в глубину строятся последовательности вершин одного цвета, находящихся на одной глубине.
- Для каждой пары (x, y) «соседних» вершин из последовательностей определяется их $LCA(x, y) = v$.
- Обновляется $D'(v)$.

Дерево удачи
День 1 Задача 4

Итоговая асимптотика:

$O(N \log N)$

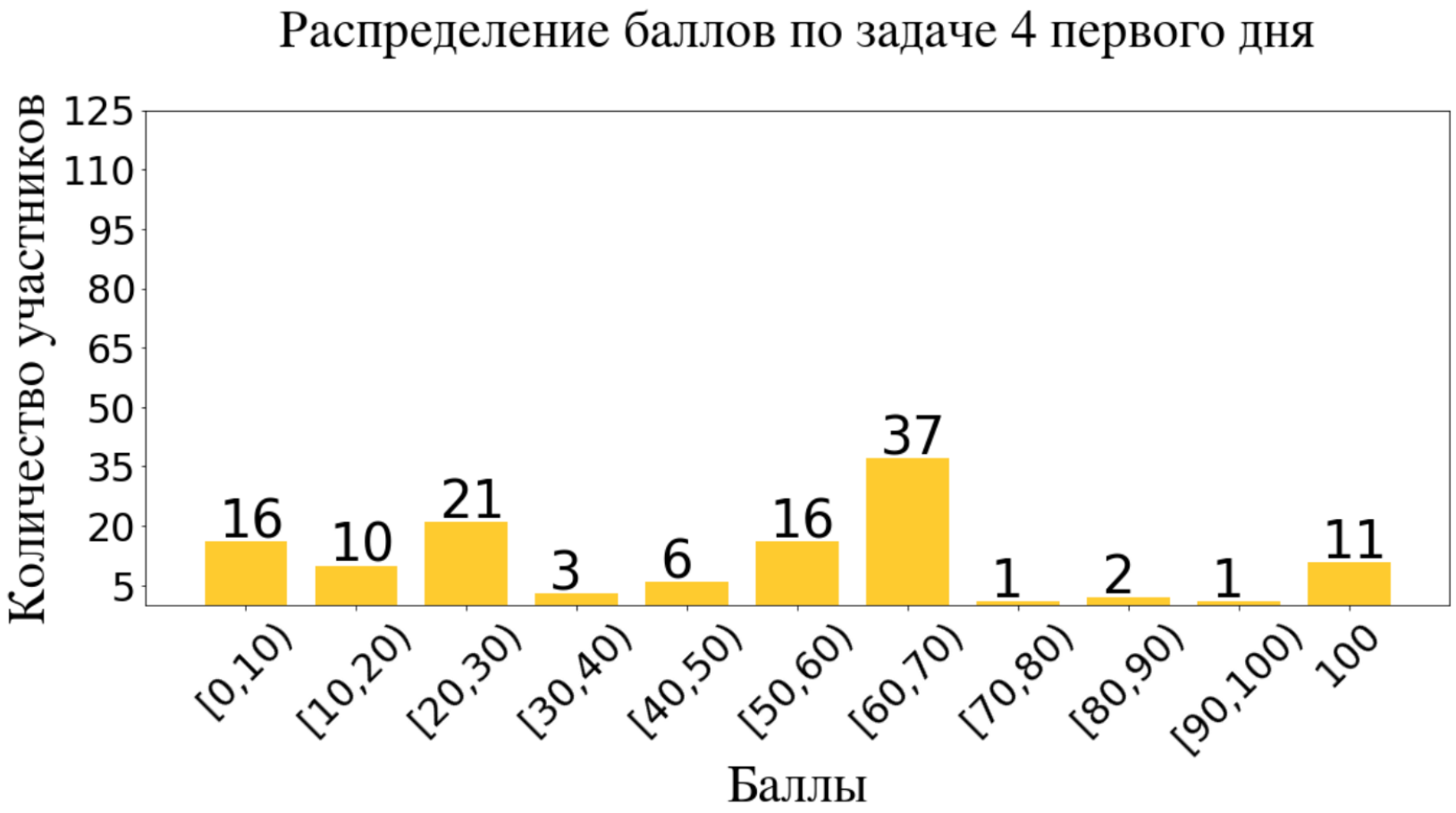
Объём используемой памяти:

$O(N \log N)$

Сложность задачи:

Высокая

День 1 Задача 4
Результаты



День 1
Результаты

День 2

День 2

1. Несложная задача
2. Город художников
3. Реорганизация
4. Лабиринт

Несложная задача
День 2 Задача 1

Дано:

Числа L и R

Нужно:

Найти количество чисел X ($L \leq X \leq R$),
у которых удвоенное количество множителей в факторизации не превосходит количество делителей.

Несложная задача
День 2 Задача 1

Количество несложных X таких, что $L \leq X \leq R$, равно количеству несложных чисел $X \leq R$ за вычетом $X < L$.

Несложная задача
День 2 Задача 1

$X = \sum_{i=1}^{K} a_i^{p_i}$, где $\forall p_i \geq 1$
Количество множителей в факторизации равно: $\sum_{i=1}^{K} p_i$
Количество делителей равно: $\prod_{i=1}^{K}(p_i + 1)$

Интересно, когда $\sum_{i=1}^{K} 2p_i \leq \prod_{i=1}^{K}(p_i + 1)$.

Несложная задача
День 2 Задача 1

Если $K = 2$, то т.к. $\forall p_i \geq 1$
$(p_1 - 1)(p_2 - 1) \geq 0 \iff 2p_1 + 2p_2 \leq (p_1 + 1)(p_2 + 1)$

Несложная задача
День 2 Задача 1

Если $K > 2$, то т.к.

$$2p_K \leq p_K \prod_{i=1}^{K-1}(p_i+1)\ , \quad \sum_{i=1}^{K-1} 2p_i \leq \prod_{i=1}^{K-1}(p_i+1)$$

выполняется

$$2p_K + \sum_{i=1}^{K-1} 2p_i \leq p_K \prod_{i=1}^{K-1}(p_i+1) + \prod_{i=1}^{K-1}(p_i+1)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$2p_K + \sum_{i=1}^{K-1} 2p_i \leq (p_K+1) \cdot \prod_{i=1}^{K-1}(p_i+1)$$

Несложная задача
День 2 Задача 1

Условие может не выполняться, только при $K = 1$.
$2p_1 > (p_1 + 1)$, если $p_1 \geq 2$.

Несложная задача
День 2 Задача 1

Итак, нужно найти количество чисел, которые не являются степенями простых.
Можно решать комплиментарную задачу: искать степени простых чисел. Сделать это можно, используя решето Эратосфена.

Несложная задача
День 2 Задача 1

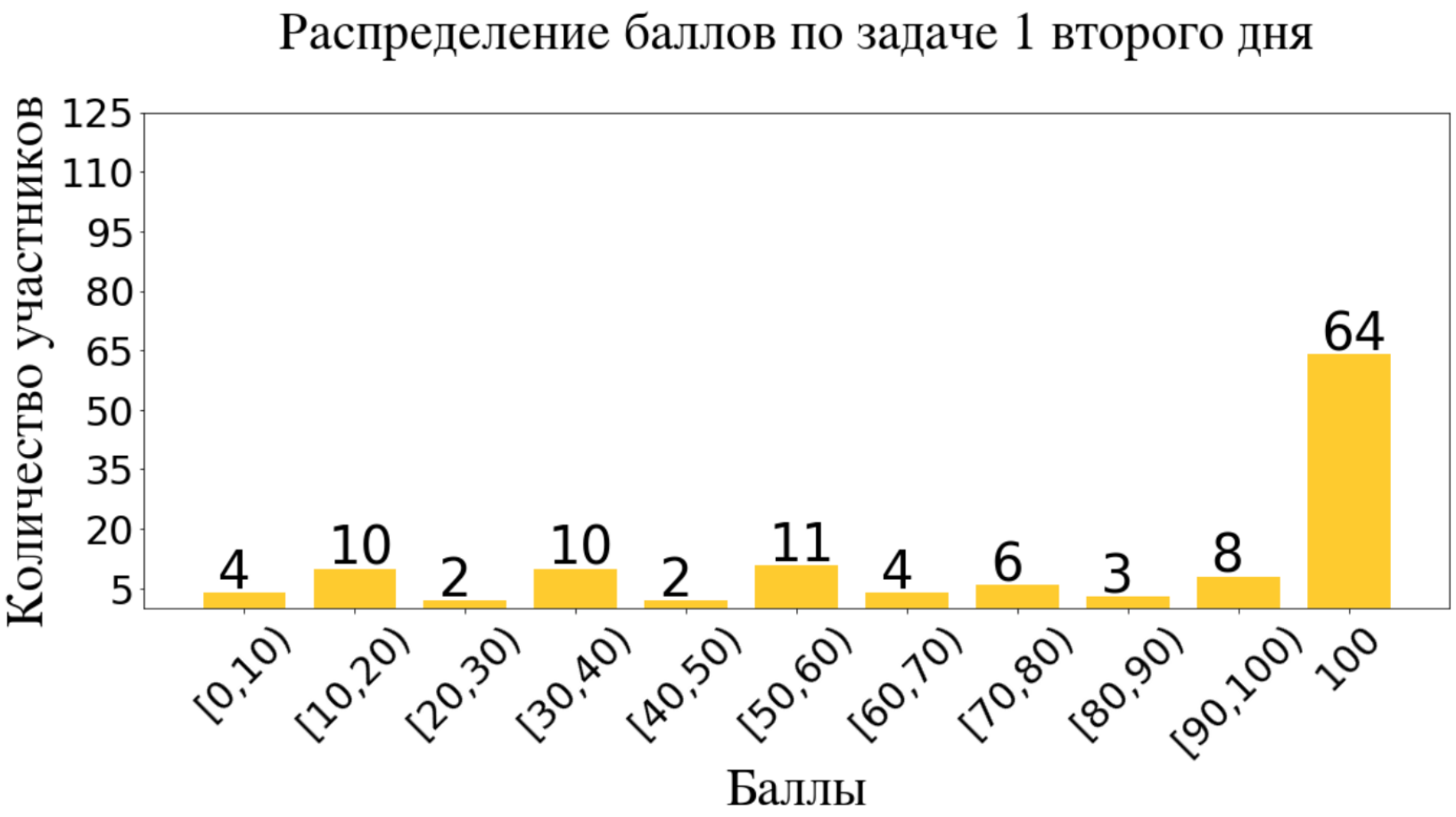
Итоговая асимптотика:

$O(\sqrt{R}\log\log R)$

Сложность задачи:

Низкая

День 2 Задача 1
Результаты



Город художников
День 2 Задача 2

Дано:

$2N$ отрезков с длинами $2A_i$
Основной отрезок длины $2L$

Нужно:

Центрально симметрично расположить $2N$ отрезков на основном отрезке так, чтобы максимальный «зазор» был как можно меньше.

Город художников
День 2 Задача 2

Используя бинарный поиск, можно перебрать ширину «зазора».
Осталось проверить, можно ли расставить отрезки с максимальным «зазором» не больше, чем X.

Город художников
День 2 Задача 2

- Сначала проверяется самая «компактная» расстановка (без отступа от краёв).
- Для неё определяется максимальный «зазор» между отрезками без учёта «зазора» в центре. Это и есть нижняя граница для бинарного поиска.

Город художников
День 2 Задача 2

Расстановка делается так:

- Из отрезков 1 и $2N$ выбирается более короткий.
- Этот отрезок должен отступать от своего края на X.
- Второй отрезок ставится так, чтобы центр совпал с первым.
- Расставляется следующая пара отрезков так, чтобы максимальное расстояние до соответствующих отрезков предыдущей пары было равно X.
- Если отрезки начали пересекаться, можно проверить меньшие значения X.
- Если «зазор» в центре получился не больше X, можно также проверить меньшие значения.
- Иначе проверяются большие значения X.

Город художников
День 2 Задача 2

Восстановление ответа происходит так:

- Для оптимального X делается расстановка, тем же алгоритмом.
- Если получились пересечения, то вычисляется его размер Y и алгоритм запускается заново, но в процессе расстановки некоторые отступы жадно уменьшаются так, чтобы суммарное уменьшение стало равно Y.

Город художников
День 2 Задача 2

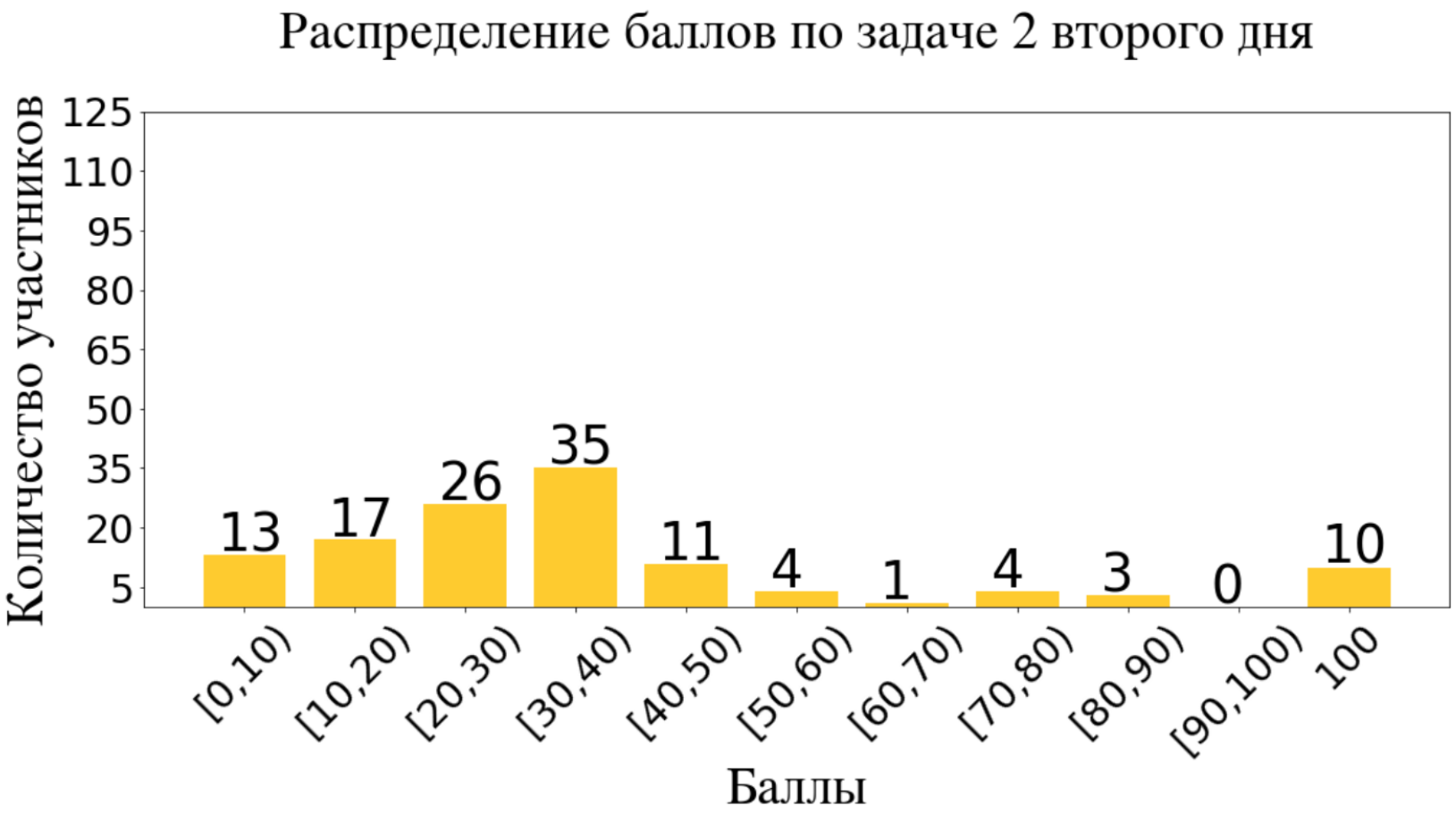
Итоговая асимптотика:

$O(N \log N)$

Сложность задачи:

Средняя

День 2 Задача 2
Результаты



Реорганизация
День 2 Задача 3

Дано:

Последовательность из N чисел A_i

Нужно:

Найти количество способов разделить последовательность на непрерывные участки так, чтобы на каждом участке встречались все числа от 1 до максимального числа на этом отрезке

Реорганизация
День 2 Задача 3

Пусть максимальный элемент находится на позиции M. Тогда все допустимые отрезки или покрывают эту позицию, или лежат левее или правее.

Последние можно найти рекурсивно на отрезках $[1, M-1]$ и $[M+1, N]$.

Осталось найти допустимые отрезки, покрывающие M.

Реорганизация
День 2 Задача 3

Если отрезок $[L, R]$ «хороший», то «хороши» все отрезки $[L, R+1], ..., [L, N]$ и $[1, R], ..., [L-1, R]$.

Поэтому для фиксированного L достаточно найти самую левую границу R, а для R – самую правую L.

Реорганизация
День 2 Задача 3

Если $M \leq \frac{N}{2}$, то можно перебирать левую границу L отрезка и определить самую левую правую. Иначе решение симметрично.

Реорганизация
День 2 Задача 3

Появляются запросы вида: «Для позиции L определить минимальное R такое, что на отрезке $[L, R]$ найдутся все числа от 1 до A_M».

Предлагается накопить эти запросы в процессе рекурсии, т.к. их будет всего $O(N \log_2 N)$.

Реорганизация
День 2 Задача 3

Итак, имеется много запросов «на отрезке $[A, B]$ по L найти R для максимального числа A_M», которые можно упорядочить по убыванию L.

Чтобы ответить на них:

- Двигаясь справа налево, поддерживается дерево отрезков T, у которого T_X – самая левая позиция числа X.
- Когда обработана позиция L, можно задать в дерево отрезков все запросы её содержащие, а именно найти максимум на отрезке $[1, A_M]$, который равен искомой границе R.

Реорганизация
День 2 Задача 3

Когда будут обработаны и симметричные запросы «на отрезке $[A, B]$ по R найти L для максимального числа A_M», для каждой позиции J будут установлены границы $[A, L]$ или $[R, B]$, означающие, что можно построить отрезки $[A, J], ..., [L, J]$ или $[J, R], ..., [J, B]$.

Реорганизация
День 2 Задача 3

Теперь, используя ДП, можно посчитать количество способов покрыть отрезок $[1, N]$ отрезками.

- F_J – количество способов покрыть префикс длины J отрезками.
- Если для J известны границы $[A, L]$, то к F_J нужно прибавить $\sum_{i=A}^{L} F_i$ (можно сделать с помощью префиксных сумм).
- Если для J известны границы $[R, B]$, то нужно увеличить $F_R, ..., F_B$ на F_J (можно сделать с помощью дерева отрезков или вспомогательного массива).

Реорганизация
День 2 Задача 3

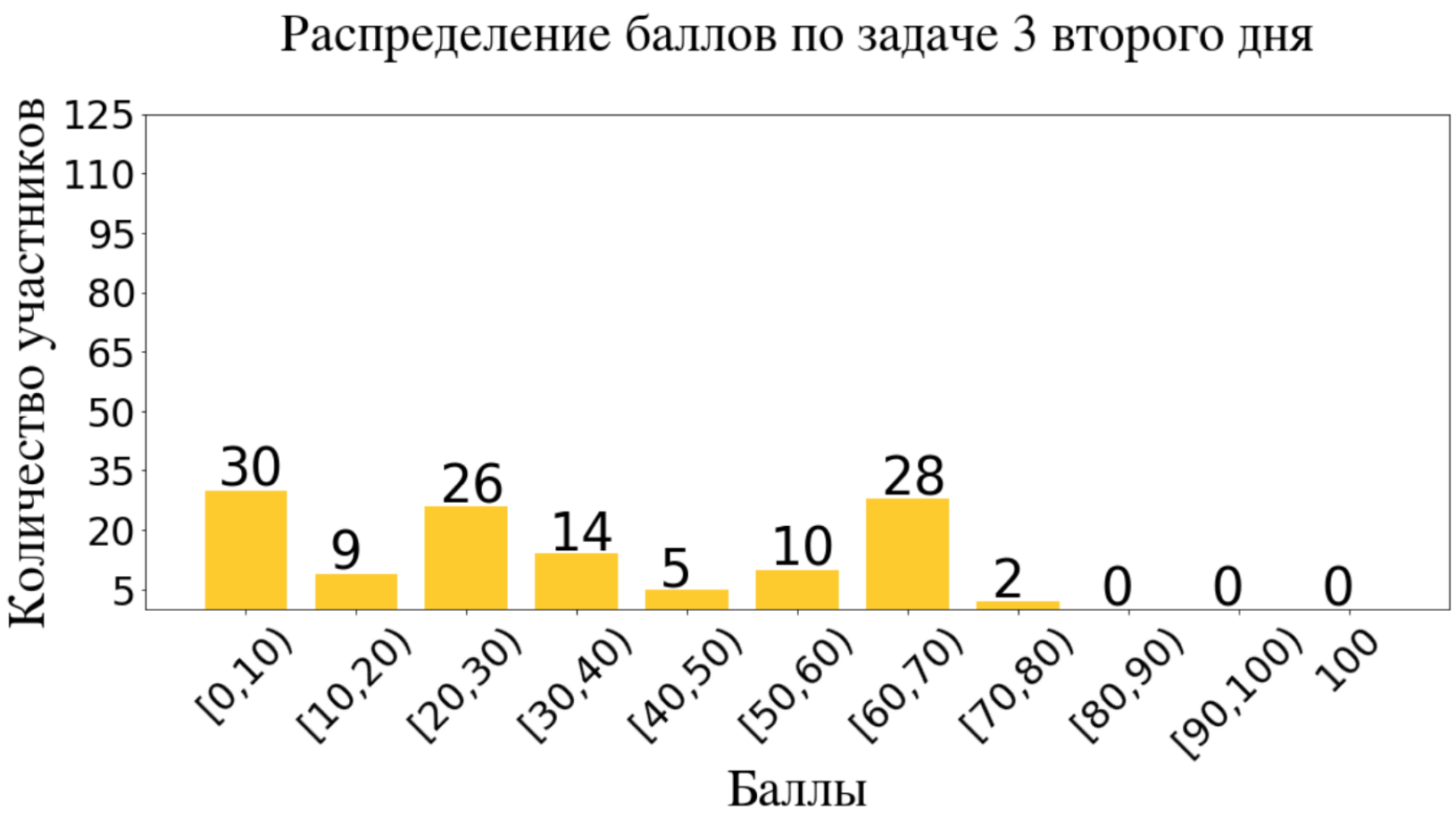
Итоговая асимптотика:

$O(N \log^2 N)$

Сложность задачи:

Высокая

День 2 Задача 3
Результаты



Лабиринт
День 2 Задача 4

Дано:

Размеры матрицы: $N \times M$
Ограничение на достаточное количество переходов – K

Нужно:

Расставить $N \times M$ поворачивающихся стрелок одного из четырёх видов: N, S, E, W так, чтобы по ним совершалось как можно больше переходов (или хотя бы K)

Лабиринт
День 2 Задача 4

Возможные варианты:

- Спираль из центра
- Начиная со случайной стрелки из центра, при переходе в каждую пустую клетку, ставится стрелка, указывающая на центр

Лабиринт
День 2 Задача 4

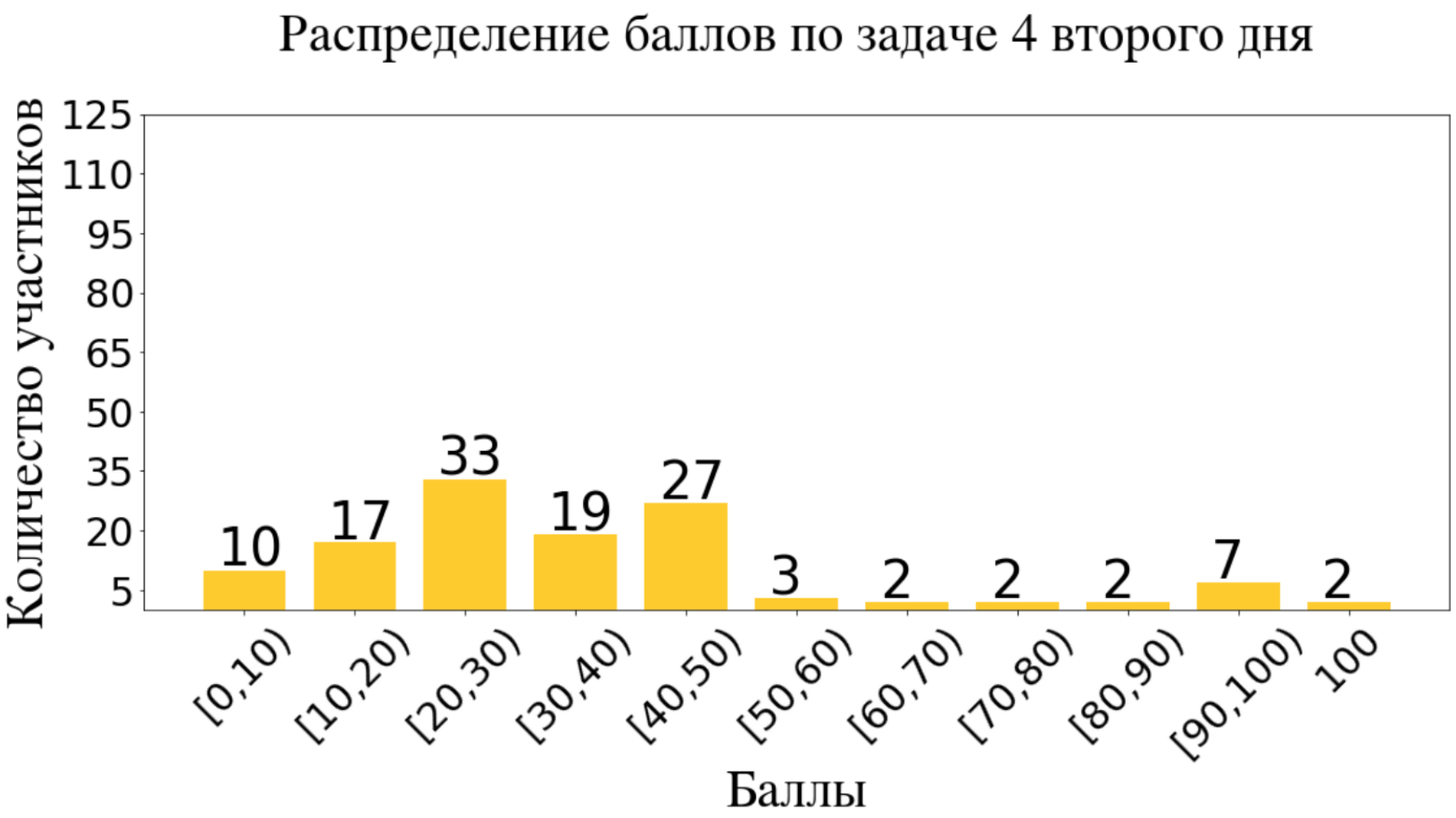
Ваши варианты?

Лабиринт
День 2 Задача 4

Сложность задачи:

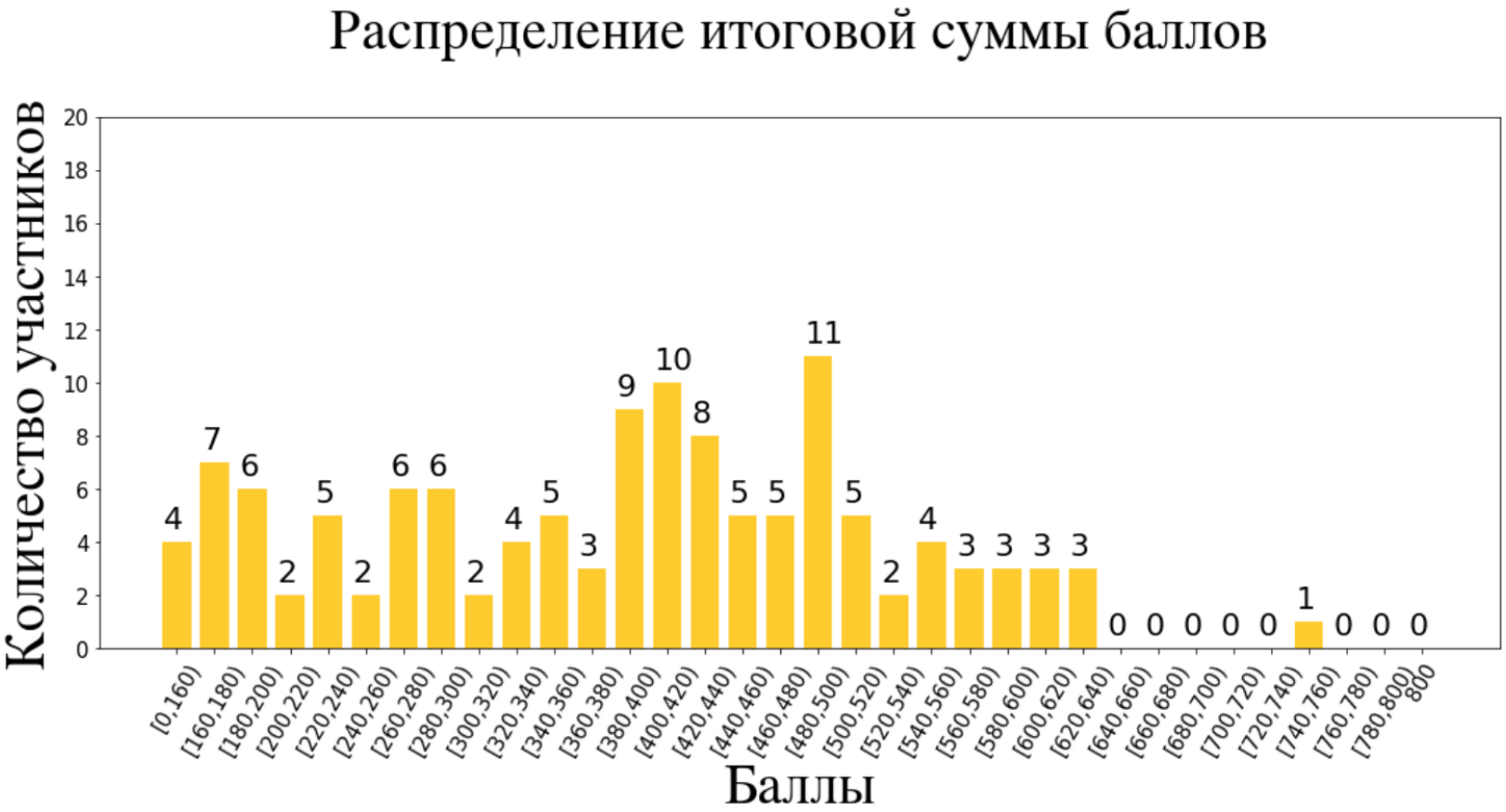
Средняя

День 2 Задача 2
Результаты



День 2
Результаты

Итоговые результаты



Спасибо за внимание